

۱- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا نقطه را جایگذاری می کنیم.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = 1^\infty$$

با توجه به توان ۳ در نمای عبارت سری مک لورن $\sin x$ و $\tan x$ را تا مرتبه سوم بسط می دهیم.

$$A \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x + \frac{x^3}{6}}{1 + x - \frac{x^3}{6}} \right)^{\frac{1}{x^3}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^3} \left(\frac{1+x+\frac{x^3}{6}}{1+x-\frac{x^3}{6}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^3} \left(\frac{x^3}{1+x-\frac{x^3}{6}} \right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

۲- گزینه ۲ درست است.

برای محاسبه طول قوس منحنی به فرم $y = f(x)$ باید تبدیل $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ را انجام دهیم.

$$y = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y'^2 = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow 1 + y'^2 = \frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3x^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$L = \int ds = \int_1^4 \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4} dx \xrightarrow[t=9x^{\frac{2}{3}}+4]{t=9x^{\frac{2}{3}}+4} L = \int_{13}^{40} \frac{1}{18} \sqrt{t} dt = \frac{1}{18} \left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_{13}^{40} = \frac{1}{27} (40\sqrt{40} - 13\sqrt{3})$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{|\vec{V} \times \vec{a}|} \text{ :نرمال صفحه بوسان}$$

$$\vec{V} = (2 \cos t + 3 \sin t, 6 \cos t - \sin t, -2 \sin t) \xrightarrow{t = (\frac{\pi}{2})} \vec{V} = (3, -1, -2)$$

$$\vec{a} = (-2 \sin t + 3 \cos t, -6 \sin t - \cos t, -2 \cos t) \xrightarrow{t = (\frac{\pi}{2})} \vec{a} = (-2, -6, 0)$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 \\ 4 \\ -20 \end{vmatrix}$$

$$\text{صفحه بوسان: } -12(x - 2) + 4(y - 6) - 20(z - 0) = 0 \xrightarrow{\div 4} -3x + y - 5z + 6 - 6 = 0$$

$$\rightarrow -3x + y - 5z = 0 \text{ or } 3x - y + 5z = 0$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

هدف سوال محاسبه مقدار سری عددی است. از تیپ چهارم مک‌لورن استفاده می‌کنیم.

$$\text{مدل‌سازی تابع: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \bigg|_{x=\frac{1}{4}}$$

$$\text{سری پایه: } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{128}{27}$$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

جرم انتگرال چگالی است. ماریچ وار سطحی، انتگرال سطح نوع اول است.

$$\Rightarrow M = \iint_S \delta(x, y, z) \, ds = \iint_S r \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$$

$$\vec{f} = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1) \end{cases}$$

$$ds = |(\sin \theta, -\cos \theta, r)| \, dr \, d\theta = \sqrt{1 + r^2} \, dr \, d\theta$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} \, dr \, d\theta = (2\pi) \left(\frac{2}{3} \right) (2\sqrt{2} - 1)$$